Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 15 im Sommersemester 2021 (am 23.07.21):
Elementare unipotente Gruppen IV
Eindimensionale lineare algebraische Gruppen.

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

Eindimensionale lineare algebraische Gruppen.

Wiederholung

3.1.2 Folgerung: Erhaltung des Zusammenhangs beim Übergang zum halbeinfachen bzw. unipotenten Teil

Ist G eine zusammenhängende kommutative lineare algebraische Gruppe, so gilt dasselbe für deren halbeinfache und unipotente Teile G_s und G_u.

Beweis. (SS 21.4, 14.1.2).
Die Zusammensetzungen des Inversen

$$\pi^{-1}: G \longrightarrow G_s \times G_u$$

des Isomorphismus von 3.1.1 (ii) mit den Projektionen auf die beiden Faktoren, sind surjektive reguläre Abbildungen

$$G \longrightarrow G_s \text{ und } G \longrightarrow G_u.$$

Mit G sind aber auch die beiden stetigen (weil regulären) Bilder von G zusammenhängend.
QED.

3.1.3 Zusammenhängende unipotente Gruppen der Dimension 1

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe der Dimension 1,

$$\dim G = 1.$$

Dann gelten folgende Aussagen.
(i) G ist kommutativ.
(ii) $G = G_s$ oder $G = G_u$.
(iii) Ist G unipotent und k von positiver Charakteristik,

$$p := \mathrm{Char}(k) > 0,$$

so ist jedes Element von G - {e} von der Ordnung p.

Beweis. (SS 21.4, 14.1.3)
Zu (i). Sei

$$g \in G.$$

Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow G,\ x \mapsto xgx^{-1}.$$

Mit G ist auch $\overline{\phi(G)}$ irreduzibel (nach 1.2.3 (i) und (ii)). Damit gilt

$$\overline{\phi(G)} = G \text{ oder } \dim \overline{\phi(G)} < \dim G = 1$$

(nach 1.8.2). Im zweiten Fall ist $\overline{\phi(G)}$ als 0-dimensionale zusammenhängende Menge einpunktig. Weil $g = \phi(e)$ in dieser Menge liegt, gilt also

$$\overline{\phi(G)} = G \text{ oder } \overline{\phi(G)} = \{g\}.$$

Nehmen wir an, es tritt der erste Fall ein,

$$\overline{\phi(G)} = G.$$

Weil $\phi(G)$ eine in G offene Teilmenge enthält (nach 1.9.5), d.h. eine Menge mit endlichem Komplement (wegen dim G = 1)[1], ist auch

$$G - \phi(G) \text{ endlich.}$$

Wir können annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe vom $\mathbf{GL}_n$ ist (nach 2.3.7(i)). Die Einschränkung des für die Matrizen von $\mathbf{GL}_n$ definierten charakteristischen Polynoms auf G,

$$\det(T\cdot 1 - y) \text{ mit } y \in G \subseteq \mathbf{GL}_n$$

ist auf jeder Konjugationsklasse konstant, also insbesondere auf $\phi(G)$. Weil das Komplement von $\phi(G)$ in G endlich ist, ist die Menge

$$\{ \det(T\cdot 1 - y) \mid y \in G \}$$

endlich. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind somit reguläre Funktionen

$$G \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

mit nur endlich vielen Werten. Weil G zusammenhängend ist, ist es auch jedes Bild von G bei einer regulären Abbildung. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind damit konstante Funktionen, d.h. $\det(T\cdot 1 - y)$ ist unabhängig von $y \in G$. Es folgt

$$\chi_y(T) = \det(T\cdot 1 - y) = \det(T\cdot 1 - e) = (T-1)^n.$$

Nach dem Satz von Caley-Hemilton gilt

$$0 = \chi_y(y) = (y-1)^n \text{ für jedes } y \in G.$$

Mit anderen Worten, G ist eine unipotente Gruppe. Als solche ist G auflösbar (nach 2.4.13 B). Insbesondere gibt es einen iterierten Kommutator von G, welcher trivial ist,

$$G^{(\ell)} = \{e\} \text{ für eine natürliche Zahl } \ell$$

(vgl. Bemerkrung 2.4.13 A (iii)). Zur Erinnerung $G^{(0)} := G$, $G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)})$. Das ist nur möglich, wenn der Kommutator von G echt enthalten ist in G,

$$(G, G) \subset G.$$

Nun ist (G, G) eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von G (nach 2.2.8(i)). Insbesondere gilt dim (G,G) < dim G = 1 (nach 1.8.2), also dim (G,G) = 0, d.h. (G,G) ist endlich und als irreduzible Varietät sogar einpunktig. Es gilt also

$$(G, G) = \{e\}.$$

---

[1] $G - \phi(G)$ ist eine echte abgeschlossene Teilmenge von G. Weil G irreduzibel ist, gilt

$$\dim G - \phi(G) < \dim G = 1$$

(nach 1.8.2), also

$$\dim (G - \phi(G)) = 0.$$

Eine affine irreduzible affine Varietät der Dimension 0 ist eine einpunktige Menge. Da die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $G-\phi(G)$ endlich ist, ist $G-\phi(G)$ eine endliche Menge.

Nach Definition von ϕ gilt aber $g^{-1}\phi(G) \subseteq (G, G)$. Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme $\overline{\phi(G)} = G$. Diese ist somit falsch, und es gilt

$$\phi(G) \subseteq \overline{\phi(G)} = \{g\},$$

also $g = \phi(x) = xgx^{-1}$ für jedes $x \in G$, also

$$gx = xg \text{ für beliebige } x, g \in G.$$

Die Gruppe G ist kommutativ, wie behauptet.
Zu (ii). Weil G kommutativ ist, gilt

$$G \cong G_s \times G_u$$

(nach 3.1.1), wobei G_s imd G_u zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen sind (vgl. 3.1.1 (i) und 3.1.2). Eine der beiden Untergruppen hat damit die Dimension 1 und die andere die Dimension 0 (nach 1.8.3). Die 0-dimensionale Untergruppe ist trivial (weil sie zusammenhängend ist). Damit gilt Aussage (ii).
Zu (iii). Wir betrachten die Untergruppen

$$<G^{p^k}>$$

von G, welche von den p^k-ten Potenzen der Elemente von G erzeugt werden. Es sind abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppen von G (nach 2.2.5(ii) und 2.2.9 Aufgabe 3). Wegen dim G = 1 sind diese Untergruppen gleich G oder gleich {e},

$$<G^{p^k}> = G \text{ oder } <G^{p^k}> = \{e\}.$$

Wir können annehmen, daß G eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$ ist (nach 2.3.7). Weil G nach Voraussetzung unipotent ist, können wir sogar annehmen, G ist abgeschlossenen Untergruppe der Gruppe $\mathbf{U}_n$ der oberen Dreiecksmatrizen, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind,

$$G \subseteq \mathbf{U}_n$$

(nach 2.4.12 B). Die Elemente der Gruppe G haben dann die Gestalt

$$g = 1 + n$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix n, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 0 sind. Weil die Charakteristik des Grundkörpers k gleich p ist und die Matrizen 1 und n kommutieren, gilt

$$g^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \bullet n^i = 1 + n^p.$$

Wir iterieren diese Identität und erhalten

$$g^{p^k} = 1 + n^{p^k}.$$

Der zweite Summand rechts ist jedoch gleich 0 für $p^k \geq n$ (vgl. Formel (5) im dritten Schritt des Beweises zu Aufgabe 4 von 2.1.4). Also gilt

$$<G^{p^k}> = \{e\} \text{ für } p^k \geq n.$$

Damit ist der Fall $< G^p > = G$ ausgeschlossen, d.h. es ist

$$< G^p > = \{e\},$$

wie behauptet.
QED.
Bemerkung
Im Rest dieses Kapitels untersuchen wir zunächst die kommutativen linearen algebraischen Gruppen, deren Elemente halbeinfach sind, und anschließend diejenigen, welche der Bedingung von 3.1.3 (iii) genügen.

14.4 Elementare unipotente Gruppen

14.4.9 Theorem: die zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppen der Dimension 1

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe der Dimension 1. Dann ist G isomorph zu $\mathbf{G}_a$ oder $\mathbf{G}_m$.

Beweis. Nach 3.1.3 ist G kommutative und die Gruppe G stimmt mit ihrem halbeinfachen oder mit ihrem unipotenten Teil überein,

$$G = G_s \text{ oder } G = G_u.$$

Im zweiten Fall ist G sogar elementar unipotent (vgl. 3.1.3 (iii) und 3.4.1)

1. Fall. $G = G_s$.

Wir können annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$. Weil G abelsch ist und aus halbeinfachen Elementen besteht, können wir annehmen, G besteht aus Diagonal-Matrizen,

$$G \subseteq \mathbf{D}_n,$$

(vgl. 2.4.2 (ii)), d.h. G ist diagonalisierbar (vgl. 3.2.1). Weil G nach Voraussetzung zusammenhängend ist, ist G ein Torus (vgl. 3.2.7 (ii)), d.h. wir können annehmen,

$$G \cong \mathbf{D}_n = \mathbf{G}_m^n$$

(vgl. 3.2.1). Weil G eindimensional sein soll, muß n = 1 sein, d.h. $G \cong \mathbf{G}_m$.

2. Fall. $G = G_u$ und G elementar unipotent.

Nach 3.4.7 (iii) hat G die Gestalt

$$G \cong \mathbf{G}_a^n \times Z_1 \times \ldots \times Z_r$$

mit endlichen zyklischen Gruppen Z_i. Weil G zusammenhängend sein soll folgt

$$G \cong \mathbf{G}_a^n,$$

und weil G eindimensional ist, muß n = 1 sein, d.h.

$$G \cong \mathbf{G}_a.$$

QED.

Zum Fortgang der Vorlesung

Allgemeine Bemerkungen zur Klassifikation

Die Klassifikation der elementar unipotenten Gruppen

Das ideale Ergebnis einer Theorie ist wohl eine Aussage, die es erlaubt, sich einen vollständigen Überblick von deren Objekten zu verschaffen und für jedes dieser Objekte dessen Struktur zu beschreiben.

Ein Beispiel für einen Klassifikationsatz ist der in den letzen beiden Vorlesungen bewiesene Satz 3.4.7.

Klassifikationssätze der linearen Algebra

Sie kennen solche Sätze aus der linearen Algebra.

Beispiel 1.

Jeder endlich-dimensionale Vektorraum über einem Körper F ist durch dessen Dimension bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Für jede nicht-negative ganze Zahl n gibt es bis auf F-lineare Isomorphie genau einen F-Vektorraum mit der Dimension n.

Beispiel 2.

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k, so ist jeder k-lineare Endomorphismus

$$V \longrightarrow V$$

durch dessen Jordansche Normalform bis auf Konjugation eindeutig festgelegt. Umgekehrt kann man durch die Wahl einer beliebigen Basis von V einen Endomorphismus finden mit vorgegebener Jordanscher-Normalform.

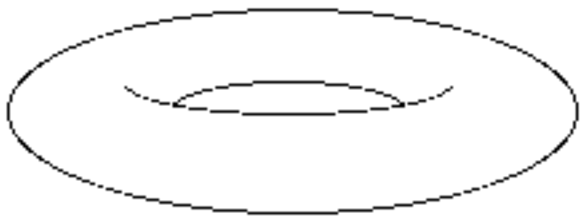
In beiden Fällen sind die betrachteten Objekte durch die Angabe endlich vieler nicht-negativer ganzer Zahlen (man spricht von diskreten Invarianten) festgelegt.

Ein Klassifikationssatz der algebraischen Geometrie

In vielen anderen Disziplinen ist die Situation komplexer. Wir geben hier ein Beispiel aus der algebraischen Geometrie an.

Beispiel 3.

Eine elliptische Kurve über den komplexen Zahlen ist eine zusammenhängende projektive algebraische Gruppe der Dimension 1. Man kann zeigen, als topologischer Raum ist eine solche Kurve homöomorph zu einem Torus $S^1 \times S^1$ der reellen Dimension 2 (vgl. Mumford [1], Kapitel I, §1, Aussage (2)).



Äquivalent kann man definieren, eine elliptische Kurve über $\mathbb{C}$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 (vgl. Forster [1], Kapitel II,§17, Abschitt 17.15)[2]. Obwohl alle diese Riemannschen Flächen homöomorph zu $S^1 \times S^1$ sind, sind sie weit davon entfernt isomorph als Riemannsche Flächen oder algebraische Varietäten zu sein.

Man kann zeigen (vgl. Hartshorne [1], Kapitel IV, Abschnitt 4, Proposition 4.6) jede elliptische Kurve über $\mathbb{C}$ ist isomorph zur projektiven Abschließung

$$C_\lambda \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

einer Kurve im $\mathbb{C}^2$ mit einer Gleichung der Gestalt

$$y^2 = x \bullet (x-1) \bullet (x-\lambda) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}-\{0,1\}$$

und umgekehrt ist die projektive Abschließung einer Kurve mit einer solchen Gleichung elliptisch (vgl. Hartshorne [1], Kapitel IV, Abschnitt 2, Folgerung 2.4). Außerdem kann man auf der Menge $\mathbb{C}-\{0,1\}$ eine Operation der symmetrischen Gruppe S_3 definieren,

$$S_3 \times (\mathbb{C}-\{0,1\}) \longrightarrow \mathbb{C}-\{0,1\},$$

wobei das Orbit von $\lambda \in \mathbb{C}-\{0,1\}$ aus den komplexen Zahlen

$$\lambda,\ 1/\lambda,\ 1-\lambda,\ 1/(1-\lambda),\ \lambda/(1-\lambda),\ (1-\lambda)/\lambda$$

---

[2] Man verwende die nachfolgende Beschreibung der elliptischen Kurven C als zweiblättrige Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel, die man erhält, indem man die Abbildungen

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x \bullet (x-1) \bullet (x-\lambda)\} \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto x,$$

auf die proktiven Abschließungen fortsetzt.

besteht, sodaß gilt

$$C_\lambda \text{ und } C_\mu \text{ sind isomorph} \Leftrightarrow \lambda \text{ und } \mu \text{ liegen im selben Orbit.}$$

(vgl. Hartshorne [1], Kapitel IV, Abschnitt 4, Lemma 4.5). Die Menge der Isomorphieklassen ist also äquivalent zur Menge

$$\mathbb{C}\text{-}\{0,1\} / S_3 \; (\cong \mathbb{P}^1_\mathbb{C})$$

der Orbits dieser Gruppen-Operation. Diese Menge kann man mit der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1_\mathbb{C}$ identifizieren. Es gilt also soviele Isomorphieklassen wir Punkte der Riemannschen Zahlenkugel. Man sagt, $\mathbb{P}^1_\mathbb{C}$ ist der Modul-Raum der elliptischen Kurven.

Einen solchen Modulraum kann man für beliebige glatte projektive Kurven eines gegebenen Geschlechts konstruieren, wobei der allgemeine Fall nicht so explizit behandelt werden kann und sehr viel mehr Theorie erfordert (vgl. Mumford, Fogarty [1]).

Zur Klassifikation in der Theorie der linearen algebraischen Gruppen

1. Reduktion auf den Fall G zusammenhängend

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow G/G^0 \longrightarrow 0.$$

Die Gruppe G^0 ist nach Definition zusammenhängend, die Faktorgruppe G/G^0 ist endlich. Um einen Überblick über alle linearen algebraischen Gruppen zu erhalten, kann man umgekehrt eine zusammenhängende Gruppe H und eine enliche Gruppen Z vorgeben,

H zusammenhängende lineare algebraische Gruppe
Z endliche Gruppe,

und nach den linearen algebraischen Gruppen G fragen, für welche eine Sequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

exakt ist. Natürlich kann man stets ein G finden, welches sich in eine solche exakte Sequenz einfügt, nämlich

$$G = H \times Z.$$

Eine naheliegende Frage ist, gibt es weitere? Und kann man eine Übersicht über alle solche G's gewinnen? Wenn ja, so hätte man das Problem auf die Klassifikation der zusammenhängenden und der endlichen linearen algebraischen Gruppen reduziert.

Im Fall, daß die Gruppe H abelsch ist,

H abelsch,

gehört die Behandlung dieser Frage zu den Standard-Konstruktionen der Lehrbücher über homologische Algebra.(vgl. zum Beispiel Weibel [1], Kapitel 6, Klassifikationstheorem 6.6.3):

Jedes Element $g \in G$ operiert auf dem Normalteiler H durch Konjugation. Im Fall H abelsch definiert die Konjugation mit Elementen aus H die identische Abbildung auf H. Die Operation von g auf H hängt deshalb nur von der Restklasse von g in

$$G/H \cong Z.$$

Auf diese Weise ist eine Operation von Z auf H definiert, H wird zum G-Modul. Man kann deshalb eine Kohomologie-Gruppe

$$H^2(Z, H)$$

definieren. Die Menge der exakten Sequenzen (bis auf Äquivalenz) läßt gerade mit den Elementen dieser Kohomologie-Gruppe identifzieren.
Im nicht-abelschen Fall ist die Situation komplexer, aber auch dann kann man die Menge der exakten Sequenzen (1) (bis auf Äquivalenz) mit den Elementen einer Kohomologie-Gruppe identifizieren, nämlich mit

$$H^2(Z, C), \tag{2}$$

wenn C das Zentrum von H bezeichnet (vgl. Brown [1], Kapitel IV, §6, Theorem 6.6).
Unser Klassifikationsproblem ist damit im wesentlichen auf den Fall

G zusammenhängend

zurückgeführt. In gewisser Weise spielt die Kohomologie-Gruppe (2) eine Rolle, die eine gewissen Ähnlichkeit mit den Modul-Räumen der algebraischen Geometrie hat.
Wir werden uns in dieser Vorlesung nicht weiter mit dieser Fragestellung beschäftigen.

2. Zusammenhängende auflösbare Gruppen

2.1 Struktursatz

Ein wichtiger Gegenstand dieser Vorlesung werden die zusammenhängenden auflösbaren linearen algebraischen Gruppen sein ("auflösbar" in Sinne der Grundvorlesung Algebra).
Die kommutativen linearen algebraischen Gruppen G sind natürlich auflösbar. Wir wissen in dieser Situation, daß G in ein direktes Produkt zerfällt,

$$G_s \times G_u \xrightarrow{\cong} G,\ (x,y) \mapsto x\bullet y,$$

Mit G ist auch G_s zusammenhängend und damit ein Torus,

$$T \times G_u \xrightarrow{\cong} G,\ (x,y) \mapsto x\bullet y,\ T \text{ ein Torus.} \tag{3}$$

Wir werden uns mit der Frage beschäftigen, was von dieser Aussage in nicht-kommutativen Fall übrig bleibt. Es stellt sich heraus, auch in diesem Fall ist (3) ein Isomorphismus, und zwar für jeden in G liegenden Torus maximaler Dimension. Allerdings ist es nur noch ein Isomorphismus von algebraischen Varietäten.

2.2 Reduktion auf den halbeinfachen Fall

Weiterhin werden wir uns mit den abgeschlossenen Normalteilern einer linearen algebraischen Gruppe G beschäftigen, welche zusammenhängend und auflösbar sind.

$H \subseteq G$, H abgeschlossener Normalteiler, zusammenhängend und auflösbar.

Wir werden zeigen, unter diesen Normalteilern gibt es einen von maximaler Dimension, in welchem alle anderen enthalgen sind. Dieser wird mit

R(G)

bezeichnet und heißt <u>Radikal</u> von G. Er ist Teil einer exakten Sequenz von linearen algebraischen Gruppen,

$$0 \longrightarrow R(G) \longrightarrow G \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 0,$$

wobei das Radikal von $\bar{G}$ trivial ist. Eine Gruppe mit trivialen Radikal heißt <u>halbeinfach</u>. Eine Gruppe, deren Radikal ein Torus ist, heißt <u>reduktiv</u>.

Im Sinne der obigen Betrachtungen der homologischen Algebra ist damit die Klassifikation auf den Fall halbeinfacher linearer algebraischer Gruppen zurückgeführt.

Es stellt sich heraus, die halbeinfachen (und sogar die reduktiven) linearen algebraischen Gruppen lassen sich mit Hilfe von diskreten Invarianten klassifizieren.

2.3 Reduktion auf den Fall von Lie-Algebren

Für jede affine Varietät X und jeden Punkt $p \in X$ kann man den (Zariski-) Tangential–raum

$$T_pX$$

von X im Punkt p konstruieren. Dies ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, der funktoriell von X und p abhängt: jede reguläre Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

affiner Varietäten induziert eine lineare Abbildung

$$df_p: T_pX \longrightarrow T_{f(p)}Y,$$

welche <u>Differential</u> von f in p heißt, wobei das Differential der identischen Abbildung die identische Abbildung ist und für je zwei reguläre Abbildungen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

und jeden Punkt $p \in X$ gilt

$$d(g\circ f)_p = dg_{f(p)}\circ df_p.$$

Insbesondere induziert jeder innere Automorphismus

$$\sigma_a: G \longrightarrow G,\ x \mapsto axa^{-1}$$

einer linearen algebraischen Gruppe G einen Automorphismus

$$(d\sigma_a)_e: T_eG \longrightarrow T_eG$$

auf dem Tangentialraum der Gruppe im neutralen Element. Man erhält so eine rationale Darstellung

$$Ad{:}G \longrightarrow \mathbf{GL}(T_eG),\ a \mapsto (d\sigma_a)_e,$$

von G, die sogenannte adjungierte Dartellung von G. Mit Hilfe dieser Darstellung kann man den Tangentialraum T_eG mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen. Der mit dieser Lie-Algebra-Struktur versehene Tangentialraum heißt Lie-Algebra von G und wird mit

$$L(G)$$

bezeichnet.

Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Tangentialräume und deren Lie-Algebra-Struktur wird der Gegenstand der Vorlesung im nächsten Semester sein.

2.4 Zur Klassifikation der Lie-Algebren

Später werden wir zeigen, die Lie-Algebra-Strukturen auf dem Tangentialraum T_eG einer halbeinfachen oder reduktiven Gruppen lassen sich durch diskrete Invarianten charakterisieren. Diese heißen Wurzel-Systeme[3] und sind durch endliche Punktmengen im $\mathbb{R}^n$ gegeben, die gewisse Symmetrie-Eigenschaften besitzen.

Zu einem vorgegebenen Wurzel-System kann man eine reduktuve Gruppe finden, deren Lie-Algebra dieses Wurzel-System besizt. Außerdem kommen Isomorphismen von Wurzelsystem von Isomorphismen der reduktiven Gruppen, die diesen Wurzelsystemen zugrundeliegen.

Die Theorie ist sehr viel komplexer als die entprechende Theorie der komplexen Lie-Gruppen und beinhaltet geometrisch aber sehr schöne Konstruktionen im projektiven Raum.

[3] Genauer: man hat sogenannte Wurzel-Data zu betrachten.

Index

Inhalt